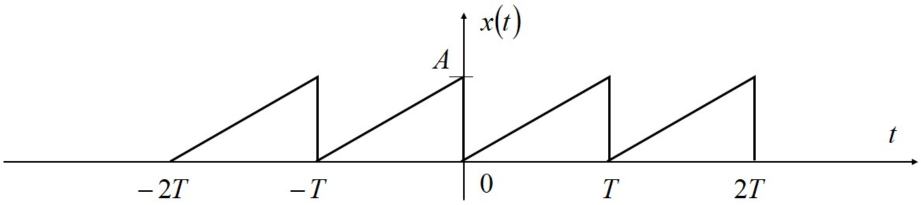
ZBIÓR ZADAŃ
Z
PODSTAW PRZETWARZANIA
SYGNAŁÓW

Temat 1: Analiza widmowa sygnałów okresowych

Zadanie 1.1
Wyznaczyć i narysować widmo sygnału okresowego o przebiegu jak na rysunku.



Rozwiązanie:

Dane:

$x(t)=\frac{A}{T}t$ dla $t\in(0,T)$

Szukane:

$a_i=?$

$|a_i|=?$

$\arg(a_i)=?$

Wzór:

$$a_i=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-ji\omega_0 t}dt$$

całkowanie przez części

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)dt$$

$$a_i=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A}{T}te^{-ji\omega_0 t}dt=\frac{A}{T^2}\int_0^T te^{-ji\omega_0 t}dt=\left|\begin{array}{ll} v'=e^{-ji\omega_0 t} & v=\frac{1}{-ji\omega_0}e^{-ji\omega_0 t},\ i\in Z\setminus\{0\} \\ u=t & u'=1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{A}{T^2}\left[\left.\frac{te^{-ji\omega_0 t}}{-ji\omega_0}\right|_0^T-\frac{1}{-ji\omega_0}\int_0^T e^{-ji\omega_0 t}dt\right]=\frac{A}{T^2}\left[\frac{te^{-ji\omega_0 t}}{-ji\omega_0}-\frac{e^{-ji\omega_0 t}}{(-ji\omega_0)^2}\right]\Bigg|_0^T=$$

$$=\frac{A}{T^2}\left[\frac{Te^{-ji\omega_0 T}}{-ji\omega_0}-\frac{e^{-ji\omega_0 T}-e^{-ji\omega_0 0}}{(-ji\omega_0)^2}\right]=\left|e^{-ji\omega_0 0}=1;\ e^{-ji\omega_0 T}=e^{-ji\frac{2\pi}{T}T}=e^{-ji2\pi}\equiv 1 \text{ dla } i\in Z\setminus\{0\}\right|=$$

$$=\frac{A}{T^2}\left[\frac{Te^{-ji\frac{2\pi}{T}T}}{-ji\frac{2\pi}{T}}-\frac{e^{-ji\frac{2\pi}{T}T}-1}{\left(-ji\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right]=\frac{A}{T^2}\left[\frac{Te^{-ji2\pi}}{-ji\frac{2\pi}{T}}-\frac{e^{-ji2\pi}-1}{\left(-ji\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right]=\frac{A}{T^2}\left[\frac{Te^{-ji2\pi}}{-ji\frac{2\pi}{T}}-\frac{1-1}{\left(-ji\frac{2\pi}{T}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{A}{T^2}\frac{T}{-ji\frac{2\pi}{T}}==\frac{A}{T^2}\frac{T^2}{-ji2\pi}=\frac{A}{-ji2\pi}=\frac{jA}{i2\pi}$$

Podczas obliczania całki założono, że $i\neq 0$, więc współczynnik a_0 należy obliczyć podstawiając $i=0$ do wzoru ogólnego

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-j0\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t dt = \frac{A}{T^2}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^T = \frac{A}{T^2}\left(\frac{T^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

Wyznaczamy widmo amplitudowe i fazowe, czyli moduł i argument współczynników

$$|a_i| = \left|\frac{jA}{i2\pi}\right| = \frac{A}{|i|2\pi},$$

$$a_i = |a_i| e^{j\arg(a_i)}$$

$$j = 0 + j1 = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_i = \frac{A}{|i|2\pi} e^{\operatorname{sgn}(i) j\frac{\pi}{2}}$$

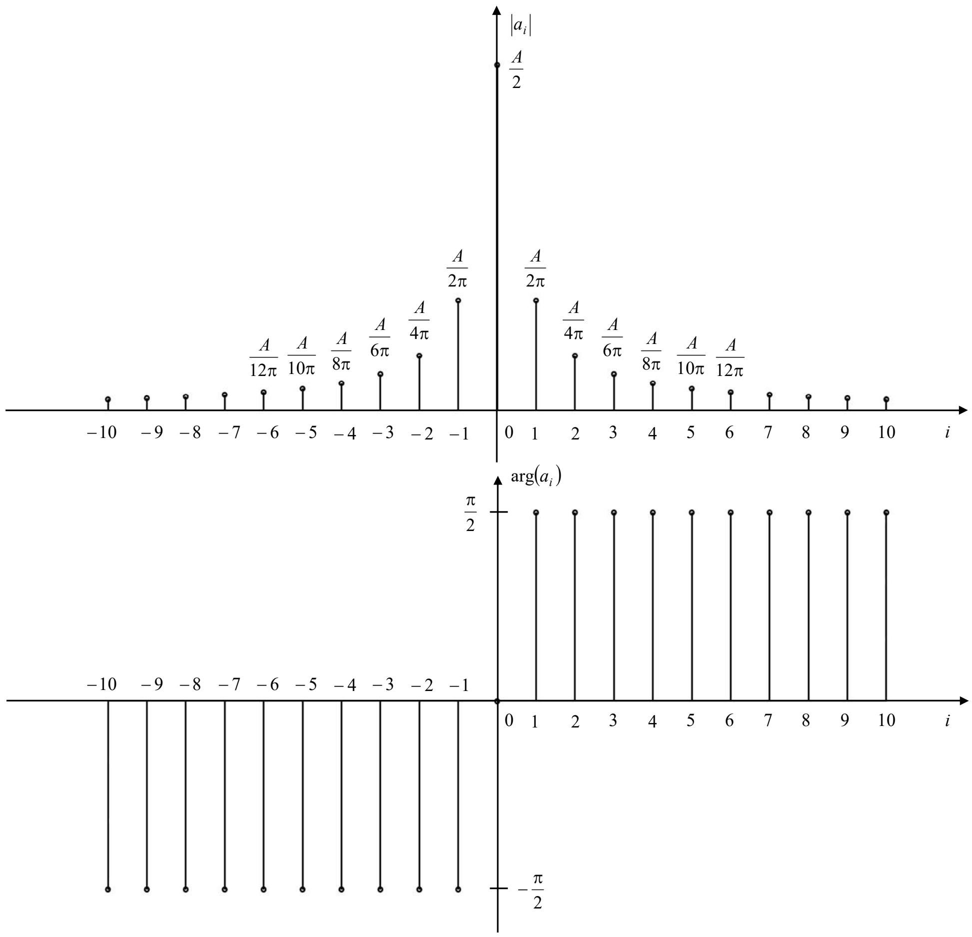
$$\arg(a_i) = \operatorname{sgn}(i)\frac{\pi}{2} \text{ dla } i \in Z \setminus \{0\}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j0\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

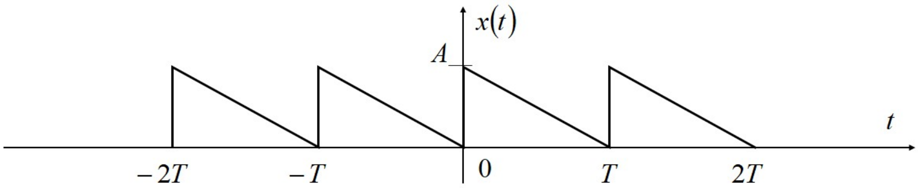
$$a_0 = \frac{A}{2}$$

Tabela 1.1 Wartości wybranych współczynników wykładniczego szeregu Fouriera dla sygnału z zad. 1.1

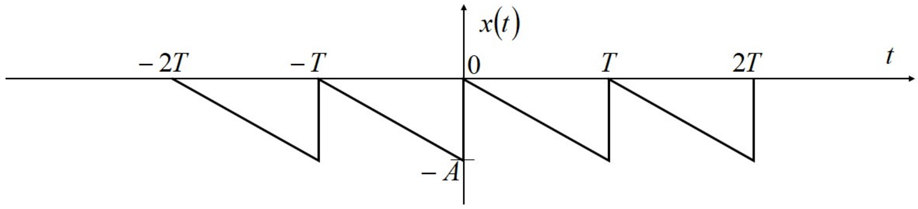
i	a_i	$\lvert a_i\rvert$	$\arg(a_i)$
-4	$-\frac{jA}{8\pi}$	$\frac{A}{8\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
-3	$-\frac{jA}{6\pi}$	$\frac{A}{6\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
-2	$-\frac{jA}{4\pi}$	$\frac{A}{4\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
-1	$-\frac{jA}{2\pi}$	$\frac{A}{2\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
0	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2}$	0
1	$\frac{jA}{2\pi}$	$\frac{A}{2\pi}$	$\frac{\pi}{2}$
2	$\frac{jA}{4\pi}$	$\frac{A}{4\pi}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$\frac{jA}{6\pi}$	$\frac{A}{6\pi}$	$\frac{\pi}{2}$
4	$\frac{jA}{8\pi}$	$\frac{A}{8\pi}$	$\frac{\pi}{2}$



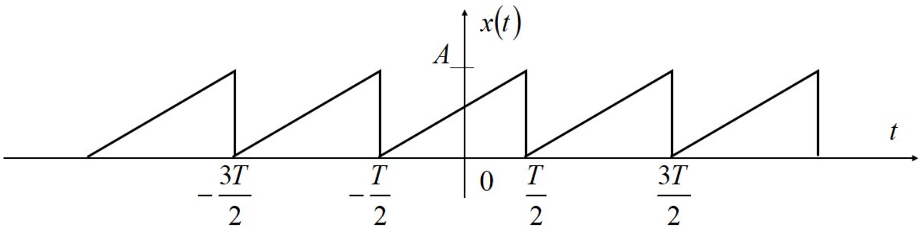
Zadanie 1.2
Wyznaczyć i narysować widmo sygnału okresowego o przebiegu jak na rysunku.
a)



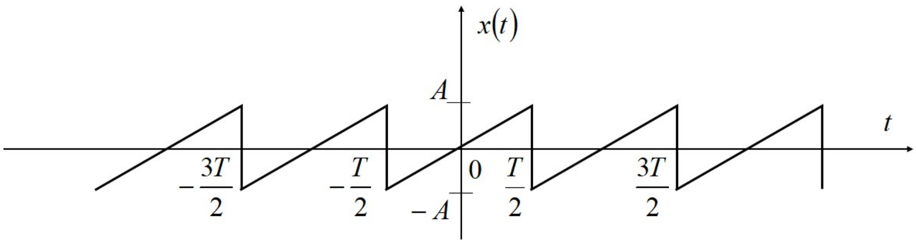
b)



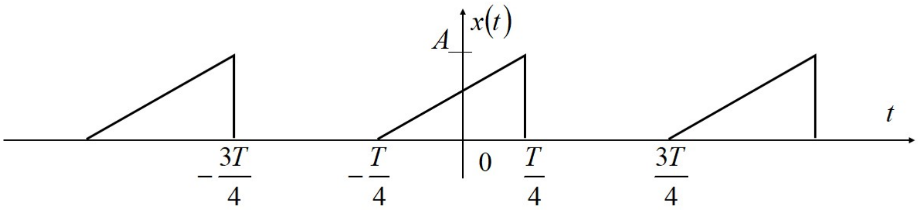
c)



d)



e)

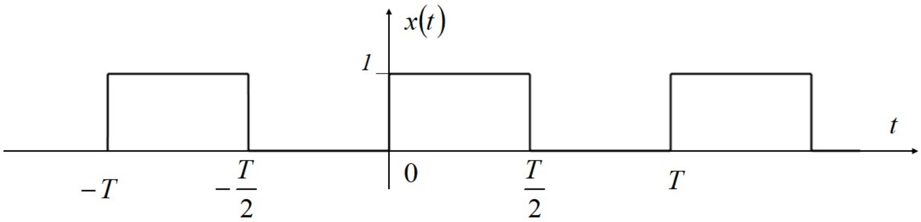


Zadanie 1.3
Wyznaczyć i narysować widmo okresowego sygnału o przebiegu

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{dla } t\in\left(0+kT;\dfrac{T}{2}+kT\right\rangle \\ 0 & \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{2}+kT;T+kT\right\rangle\end{cases}\qquad k\in Z$$

lub inaczej:

Wyznaczyć i narysować widmo sygnału okresowego o przebiegu jak na rysunku.



Rozwiązanie:

Dane:

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{dla } t\in\left(0;\dfrac{T}{2}\right\rangle \\ 0 & \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{2};T\right\rangle\end{cases}$$

(opisujemy pojedynczy okres)

Szukane:

$$a_i=?$$

Wzór:

$$a_i=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-ji\omega_0 t}dt$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)dt$$

$$e^{\pm j\alpha}=\cos\alpha\pm j\sin\alpha$$

$$a_i=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}1e^{-ji\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\left(\frac{1}{-ji\omega_0}\right)e^{-ji\omega_0 t}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\Big|i\in Z\setminus\{0\}\Big|=\frac{1}{-ji\omega_0 T}\left(e^{-ji\omega_0\frac{T}{2}}-e^{-ji\omega_0 0}\right)=$$

$$\frac{1}{-ji\omega_0 T}\left(e^{-ji\omega_0\frac{T}{2}}-1\right)=\frac{1}{-ji\frac{2\pi}{T}T}\left(e^{-ji\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}-1\right)=\frac{1}{-ji2\pi}\left(e^{-ji\pi}-1\right)=$$

$$\frac{1}{-ji2\pi}(\cos i\pi-j\sin i\pi-1)=\frac{j1}{i2\pi}(\cos i\pi-j\sin i\pi-1)=\frac{-j1}{i2\pi}(1-\cos i\pi+j\sin i\pi)$$

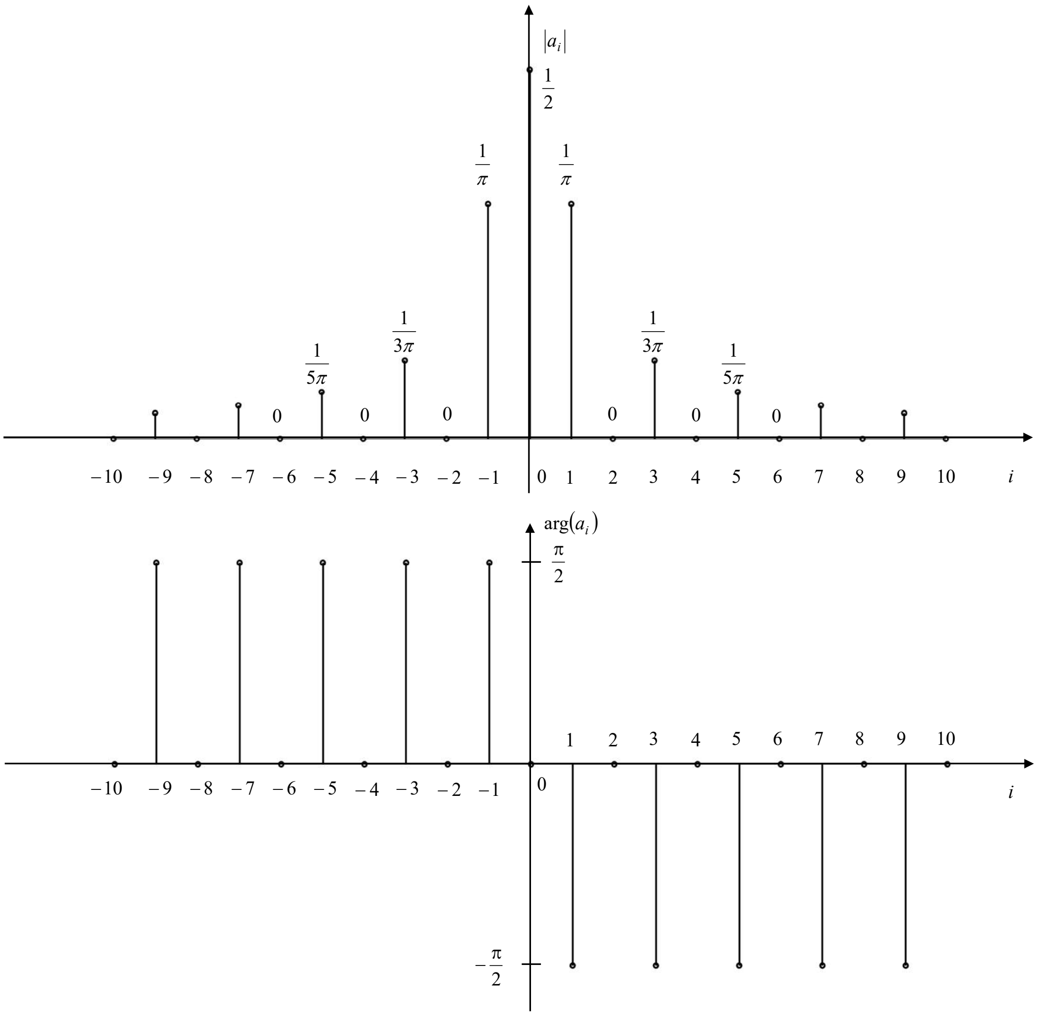
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}dt=\frac{1}{T}t\,\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos i\pi=\begin{cases}1 & \text{dla parzystych } i\\ -1 & \text{dla nieparzystych } i\end{cases}\qquad \sin i\pi=0 \text{ dla } i\in Z$$

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{dla parzystych } i \\ \dfrac{-j1}{i\pi} & \text{dla nieparzystych } i \end{cases}$$

$$|a_i| = \begin{cases} 0 & \text{dla parzystych } i \\ \dfrac{1}{|i|\pi} & \text{dla nieparzystych } i \end{cases} \qquad \arg(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla parzystych } i \\ -\operatorname{sgn}(i)\dfrac{\pi}{2} & \text{dla nieparzystych } i \end{cases}$$

i	a_i	$\lvert a_i \rvert$	$\arg(a_i)$
-4	0	0	0
-3	$\frac{j1}{3\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{\pi}{2}$
-2	0	0	0
-1	$\frac{j1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1	$-\frac{j1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	0	0
3	$-\frac{j1}{3\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
4	0	0	0


$|a_i|$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\pi}$
$\frac{1}{\pi}$
$\frac{1}{3\pi}$
$\frac{1}{3\pi}$
$\frac{1}{5\pi}$
$\frac{1}{5\pi}$
0
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
i
$\arg(a_i)$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0
i

Zadanie 1.4
Wyznaczyć i narysować widmo okresowego sygnału o przebiegu

a)

$$x(t)=\begin{cases}1 \quad \text{dla } t\in\left(0+kT;\dfrac{T}{4}+kT\right\rangle \\ -1 \quad \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{4}+kT;T+kT\right\rangle\end{cases} \qquad k\in Z$$

b)

$$x(t)=\begin{cases}2 \quad \text{dla } t\in\left(0+kT;\dfrac{T}{4}+kT\right\rangle \\ 1 \quad \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{4}+kT;\dfrac{T}{2}+kT\right\rangle \\ 0 \quad \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{2}+kT;T+kT\right\rangle\end{cases} \qquad k\in Z$$

c)

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{At}{2T}+A\left(k+\dfrac{1}{2}\right) \quad \text{dla } t\in\left(0+kT;\dfrac{T}{4}+kT\right\rangle \\ -1 \quad \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{4}+kT;T+kT\right\rangle\end{cases} \qquad k\in Z$$

d)

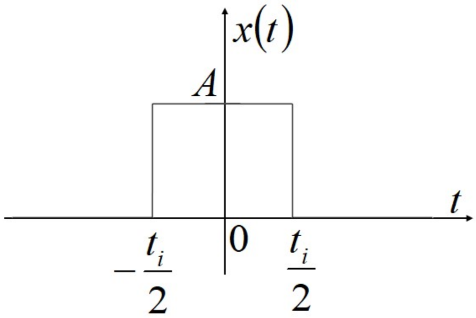
$$x(t)=\begin{cases}A\cos(\omega_0 t) \quad \text{dla } t\in\left(0+kT;\dfrac{T}{2}+kT\right\rangle \\ 0 \quad \text{dla } t\in\left(\dfrac{T}{2}+kT;T+kT\right\rangle\end{cases} \qquad k\in Z$$

Temat 2: Analiza widmowa sygnałów nieokresowych

Zadanie 2.1

Wyznaczyć widmo idealnego prostokątnego impulsu wizyjnego o amplitudzie A, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili $t = -\frac{t_i}{2}$.

Rysunek:



Rozwiązanie:

Dane:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{dla } t \in \left(-\frac{t_i}{2}, \frac{t_i}{2}\right) \\ 0 & \text{dla } t \notin \left(-\frac{t_i}{2}, \frac{t_i}{2}\right) \end{cases}$$

Szukane:

$$X(\omega) = ?$$

Wzór:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right) = 2j\sin\alpha$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} A e^{-j\omega t} dt = A\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} e^{-j\omega t} dt = A\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Bigg|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{t_i}{2}} - e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right) = 2A\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega} = At_i\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega\frac{t_i}{2}}$$

$$|X(\omega)| = At_i\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega\frac{t_i}{2}}\right|$$

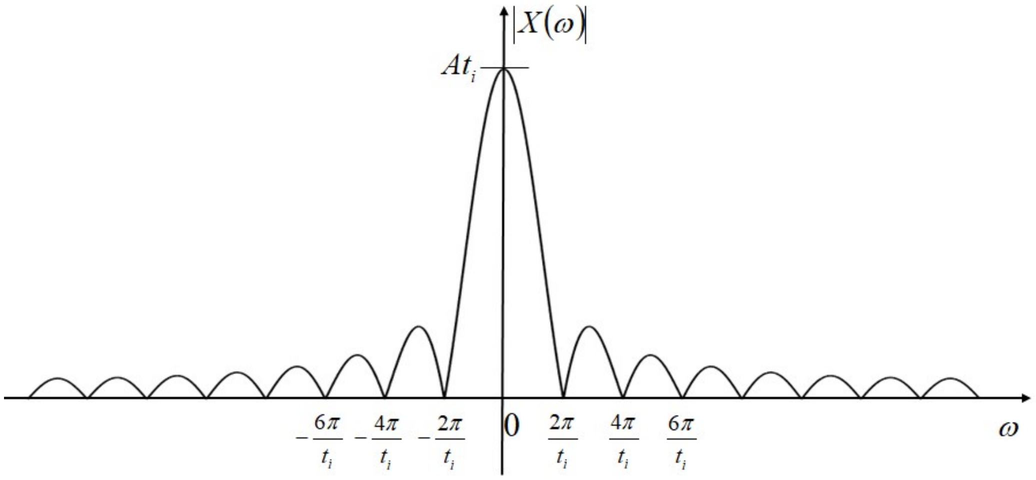
Wyznaczamy miejsca zerowe

$$At_i \frac{\sin\left(\omega \frac{t_i}{2}\right)}{\omega \frac{t_i}{2}} = 0$$

$$\sin\left(\omega \frac{t_i}{2}\right) = 0$$

$\omega \frac{t_i}{2} = k\pi$, k jest numerem miejsca zerowego, $k \in Z \setminus \{0\}$

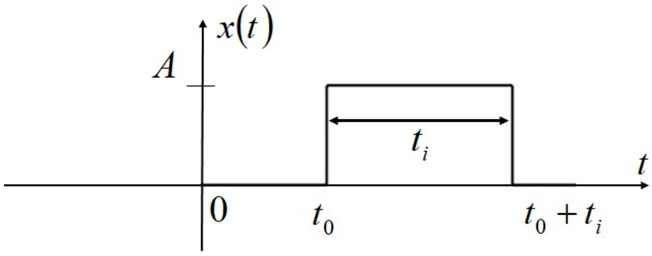
$$\omega_k = \frac{2k\pi}{t_i}$$



Zadanie 2.2

Wyznaczyć widmo idealnego prostokątnego impulsu wizyjnego o amplitudzie A, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili $t = t_0$

Rysunek:



Rozwiązanie:

Dane:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{dla } t \in (t_0 ; t_0 + t_i) \\ 0 & \text{dla } t \notin (t_0 ; t_0 + t_i) \end{cases}$$

Szukane:

$$X(\omega) = ?$$

Wzór:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right) = 2j\sin\alpha$$

$$X(\omega)=\int_{t_0}^{t_0+t_i} Ae^{-j\omega t}dt = A\int_{t_0}^{t_0+t_i} e^{-j\omega t}dt = A\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Bigg|_{t_0}^{t_0+t_i} = \frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega(t_0+t_i)}-e^{-j\omega t_0}\right)$$

$$X(\omega)=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t_0}\left(e^{-j\omega t_i}-1\right)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t_0}\left(1-e^{-j\omega t_i}\right)$$

podstawiając

$1=e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}e^{j\omega\frac{t_i}{2}}$ oraz $e^{-j\omega t_i}=e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}$

$$X(\omega)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t_0}\left(e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}e^{j\omega\frac{t_i}{2}}-e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}\right)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t_0}e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}\left(e^{j\omega\frac{t_i}{2}}-e^{-j\omega\frac{t_i}{2}}\right)$$

$$X(\omega)=e^{-j\omega\left(t_0+\frac{t_i}{2}\right)}\frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)=e^{-j\omega\left(t_0+\frac{t_i}{2}\right)}2A\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega}=e^{-j\omega\left(t_0+\frac{t_i}{2}\right)}At_i\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega\frac{t_i}{2}}$$

$$|X(\omega)|=At_i\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{t_i}{2}\right)}{\omega\frac{t_i}{2}}\right|$$

Zadanie 2.3

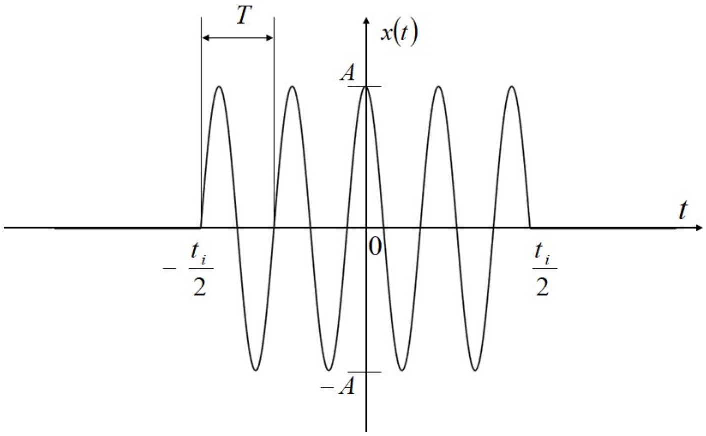
Wyznaczyć widmo sygnału będącego sumą dwóch idealnych prostokątnych impulsów wizyjnych o następujących parametrach:
- pierwszy o amplitudzie A, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili $t=-t_i$,
- drugi o amplitudzie $(-A)$, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili $t=0$.

Zadanie 2.4

Wyznaczyć widmo idealnego prostokątnego impulsu radiowego o wypełnieniu kosinusoidalnym, pulsacji ω_0, amplitudzie A, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili $t=-\frac{t_i}{2}$.

Narysować widmo amplitudowe.

Rysunek:



Rozwiązanie:

Dane:

$$x(t)=\begin{cases} A\cos\omega_0 t \quad \text{dla } t\in\left(-\frac{t_i}{2},\frac{t_i}{2}\right) \\ 0 \quad \text{dla } t\notin\left(-\frac{t_i}{2},\frac{t_i}{2}\right)\end{cases}$$

Szukane:

$$X(\omega)=?$$

Wzór:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\cos\alpha=\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$$

$$X(\omega)=\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}A\cos\omega_0 t\ e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}\cos\omega_0 t\ e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\ e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega)=\frac{A}{2}\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{2}\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}+e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{2}\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}e^{-j(\omega-\omega_0)t}+e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt$$

$$X(\omega)=\frac{A}{2}\left[\frac{1}{-j(\omega-\omega_0)}e^{-j(\omega-\omega_0)t}+\frac{1}{-j(\omega+\omega_0)}e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right]\Bigg|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}$$

$$X(\omega)=\frac{A}{2}\left\{\left[\frac{1}{-j(\omega-\omega_0)}\left(e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}-e^{j(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}\right)\right]+\left[\frac{1}{-j(\omega+\omega_0)}\left(e^{-j(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}-e^{j(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}\right)\right]\right\}$$

$$X(\omega)=A\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega-\omega_0)}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$X(\omega)=\frac{At_i}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}\right]$$

$$|X(\omega)| = \frac{|At_i|}{2}\left[\left|\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{t_i}{2}}\right| + \left|\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{t_i}{2}}\right|\right]$$

Zadanie 2.5

Wyznaczyć widmo idealnego prostokątnego impulsu radiowego o wypełnieniu kosinusoidalnym, pulsacji ω_0, amplitudzie A, czasie trwania t_i, który rozpoczął się w chwili

a) $t = 0$

b) $t = -t_i$

c) $t = t_0$

Temat 3: Przekształcenie Hilberta. Sygnał analityczny

Zadanie 3.1

Wyznaczyć sygnał skojarzony $\hat{x}(t)$ z sygnałem harmonicznym:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

Na podstawie sygnałów $x(t)$ i $\hat{x}(t)$ wyznaczyć sygnał analityczny stowarzyszony z sygnałem $x(t)$.

Rozwiązanie:

Dane:	Szukane:	Wzór:
$x(t) = A\cos\omega_0 t$	$\hat{x}(t) = ?$	$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$
	$z_x(t) = ?$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
		$z_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\cos\omega_0\tau}{t-\tau}d\tau = -\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0\tau}{\tau - t}d\tau = \begin{vmatrix} k = \tau - t \\ \tau = k + t \\ d\tau = dk \end{vmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = -\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0 k\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 k\sin\omega_0 t}{k}dk$$

$$\hat{x}(t) = -\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0 k\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 k\sin\omega_0 t}{k}dk$$

Z nieparzystości funkcji $\frac{\cos ax}{x}$ wynika

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x}dx = 0 .$$

Z tablicy całek:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi \text{ dla } a > 0 \\ -\frac{1}{2}\pi \text{ dla } a < 0 \end{cases}.$$

Z parzystości funkcji $\frac{\sin ax}{x}$ wynika

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \pi .$$

Zatem sygnał skojarzony z sygnałem $x(t)$ ma postać

$$\hat{x}(t) = -\frac{A}{\pi}\left[(\cos\omega_0 t)\cdot 0 - (\sin\omega_0 t)\pi\right] = \frac{A}{\pi}\pi\sin\omega_0 t = A\sin\omega_0 t .$$

Sygnał analityczny stowarzyszony z sygnałem $x(t)$ ma postać

$$z_x(t) = A\cos\omega_0 t + jA\sin\omega_0 t = A(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

Zadanie 3.2

Wyznaczyć sygnał skojarzony $\hat{x}(t)$ z sygnałem harmonicznym:

$$x(t) = A\sin\omega_0 t$$

Na podstawie sygnałów $x(t)$ i $\hat{x}(t)$ wyznaczyć sygnał analityczny stowarzyszony z sygnałem $x(t)$.

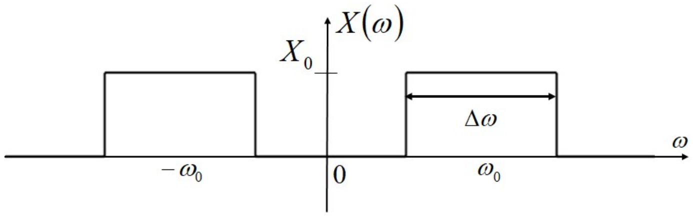
Zadanie 3.3

Wyznaczyć sygnał analityczny stowarzyszony z idealnym rzeczywistym sygnałem pasmowym $x(t)$ o parametrach X_0, ω_0, $\Delta\omega$.

Na podstawie sygnału $z_x(t)$ wyznaczyć postać czasową sygnału rzeczywistego $x(t)$ i sygnału z nim skojarzonego $\hat{x}(t)$.

Rysunek.

Widmo sygnału $x(t)$



Rozwiązanie:

Dane:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_0 \text{ dla } |\omega| \in \left(\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}\right) \\ 0 \text{ dla } |\omega| \notin \left(\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}\right) \end{cases}$$

Szukane:

$z_x(t) = ?$

$x(t) = ?$

$\hat{x}(t) = ?$

Wzór:

$$z_x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \mathrm{Re}[z_x(t)]$$

$$\hat{x}(t) = \mathrm{Im}[z_x(t)]$$

$$z_x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} X_0 e^{j\omega t}d\omega = \frac{X_0}{\pi}\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{j\omega t}d\omega = \frac{X_0}{\pi}\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Bigg|_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}$$

$$z_x(t) = \frac{X_0}{j\pi t}\left(e^{j\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} - e^{j\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t}\right) = \frac{X_0}{j\pi t}e^{j\omega_0 t}\left(e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t}\right) = \frac{X_0}{j\pi t}e^{j\omega_0 t}2j\sin\frac{\Delta\omega}{2}t$$

$$z_x(t) = \frac{X_0\Delta\omega}{\pi}e^{j\omega_0 t}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta\omega}{2}t}$$

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{X_0\Delta\omega}{\pi}e^{j\omega_0 t}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta\omega}{2}t}\right]=\frac{X_0\Delta\omega}{\pi}\cos\omega_0 t\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta\omega}{2}t}$$

$$\hat{x}(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{X_0\Delta\omega}{\pi}e^{j\omega_0 t}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta\omega}{2}t}\right]=\frac{X_0\Delta\omega}{\pi}\sin\omega_0 t\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta\omega}{2}t}$$

Zadanie 3.4

Wyznaczyć sygnał analityczny stowarzyszony z idealnym rzeczywistym sygnałem dolnopasmowym $x(t)$ o parametrach X_0, ω_z.
Na podstawie sygnału $z_x(t)$ wyznaczyć postać czasową sygnału rzeczywistego $x(t)$ i sygnału z nim skojarzonego $\hat{x}(t)$.

Temat 4: Analiza widmowa sygnałów dyskretnych

Zadanie 4.1

Wyznaczyć dyskretne widmo sygnału dyskretnego
$x(n) = a^n$ dla $n \in \langle 0, N-1 \rangle$

Rozwiązanie:

Dane:

$x(n) = a^n \; n \in \langle 0, N-1 \rangle$

Szukane:

$X(k) = ?$

Wzór:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$S_N = a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(ae^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^n = \left| q = ae^{-j\frac{2\pi}{N}k} ; q \neq 1 \Rightarrow \text{dla } a = 1 \quad k \neq 0 \right| =$$

$$= \frac{1-\left(ae^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-a^N e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} == \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

dla $a = 1$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n0} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

Zadanie 4.2

Wyznaczyć dyskretne widmo sygnału dyskretnego

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \in \langle 0, n_0 - 1 \rangle \\ 0 & \text{dla} \quad n \in \langle n_0, N-1 \rangle \end{cases} \text{ dla } n_0 \in \langle 0, N-1 \rangle, \; n \in \langle 0, N-1 \rangle$$

Rozwiązanie:

Dane:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \in \langle 0, n_0 - 1 \rangle \\ 0 & \text{dla} \quad n \in \langle n_0, N-1 \rangle \end{cases}$$

$n_0 \in \langle 0, N-1 \rangle$, $n \in \langle 0, N-1 \rangle$

Szukane:

$X(k) = ?$

Wzór:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$S_N = a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^n = \left| q = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} ; q \neq 1 \Rightarrow k \neq 0 \right| = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n0} = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1 = n_0$$

W liczniku podstawiamy

$$1 = e^{j\frac{\pi}{N}kn_0} e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0}$$

oraz

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0} = e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0} e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0},$$

natomiast w mianowniku

$$1 = e^{j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

oraz

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\pi}{N}k}.$$

Otrzymujemy

$$X(k) = \frac{e^{j\frac{\pi}{N}kn_0} e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0} - e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0} e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0}}{e^{j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\pi}{N}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0}\left(e^{j\frac{\pi}{N}kn_0} - e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)}$$

$$X(k) = e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_0-1)} \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{N}kn_0} - e^{-j\frac{\pi}{N}kn_0}\right)}{\left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)} = e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_0-1)} \frac{2j\sin\frac{\pi}{N}kn_0}{2j\sin\frac{\pi}{N}k}$$

$$X(k) = e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_0-1)} \frac{\sin\frac{\pi}{N}kn_0}{\sin\frac{\pi}{N}k} \quad \text{dla } k \neq 0, \; X(0) = n_0$$

Zadanie 4.3

Wyznaczyć dyskretne widmo sygnału dyskretnego

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \in \langle n_1, n_2 - 1\rangle \\ 0 & \text{dla} \quad n \notin \langle n_1, n_2 - 1\rangle \end{cases} \quad \text{dla } n_1 \in \langle 0, N-1\rangle, \; n_2 \in \langle n_1 + 1, N-1\rangle \; n \in \langle 0, N-1\rangle$$

Rozwiązanie:

Dane:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \in \langle n_1, n_2 - 1\rangle \\ 0 & \text{dla} \quad n \notin \langle n_1, n_2 - 1\rangle \end{cases}$$

$$n_1 \in \langle 0, N-1\rangle, \; n_2 \in \langle n_1 + 1, N-1\rangle \; n \in \langle 0, N-1\rangle$$

Szukane:

$$X(k) = ?$$

Wzór:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$S_N = a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{dla } q \neq 1$$

$$X(k) = \sum_{n=n_1}^{n_2-1} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=n_1}^{n_2-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n = \left| q = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}; \; q \neq 1 \Rightarrow k \neq 0 \right| = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n_2-n_1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$X(0)=\sum_{n=n_1}^{n_2-1} 1e^{-j\frac{2\pi}{N}n0}=\sum_{n=n_1}^{n_2-1} 1=n_2-n_1$$

W liczniku podstawiamy

$$1=e^{j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}$$

oraz

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n_2-n_1)}=e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)},$$

natomiast w mianowniku

$$1=e^{j\frac{\pi}{N}k}e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

oraz

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=e^{-j\frac{\pi}{N}k}e^{-j\frac{\pi}{N}k}.$$

Otrzymujemy

$$X(k)=\frac{e^{j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}-e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}}{e^{j\frac{\pi}{N}k}e^{-j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}e^{-j\frac{\pi}{N}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}-e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)}$$

$$X(k)=e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1-1)}\frac{\left(e^{j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}-e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}\right)}{\left(e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)}=e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1-1)}\frac{2j\sin\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}{2j\sin\frac{\pi}{N}k}$$

$$X(k)=e^{-j\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1-1)}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(n_2-n_1)}{\sin\frac{\pi}{N}k}\quad \text{dla } k\neq 0,\ X(0)=n_2-n_1$$